POLYNOMY

P pole ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

$a_0, \dots, a_n \in P$, $n \in \mathbb{N}$

$x \notin P$

POLYNOM neurčité x nad polem P je výraz

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

a_0 ... absolutní člen

v případě, že $a_0, \dots, a_n = 0$, polynom je NULOVÝ a značí se 0.

STUPEŇ polynomu f je největší číslo r takové, že $a_r \neq 0$, a značí se $\deg f$. Koeficient a_r se nazývá VEDOUCÍ KOEFICIENT a značí se $\operatorname{lc} f = a_r$.

$a \in P$

$f = a$ KONSTANTNÍ

$a_1, a_0 \in P$

$f = a_1 x + a_0$ LINEÁRNÍ

$a_2, a_1, a_0 \in P$

$f = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ KVADRATICKÝ

$\deg f = 2$

KUBICKÝ, BIKVADRATICKÝ, ...

Množina všech polynomů neurč. x nad polem P se značí $P[x]$.

$\mathbb{R}[x] \ni f$

$f \in P[x]$, $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

$\xi \in P$.

$f(\xi) = a_n \xi^n + a_{n-1} \xi^{n-1} + \dots + a_1 \xi + a_0 \in P$

Jestliže $f(\xi) = 0$ pro nějaké $\xi \in P$, potom ξ je KOŘEN polynomu f.

$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$

označme $p = \max\{n, m\}$,

pro $k \in \{0; \dots; p\}$ $c_k = a_k + b_k$.

SOUČET polynomů f, g je polynom $f + g = c_p x^p + c_{p-1} x^{p-1} + \dots + c_0$.

$-f = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \dots - a_0$

OPAČNÝ polynom.

$p = m + n$, pro $k \in \{0, \dots, p\}$

$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0 =$

$= \sum_{i+j=k} a_i b_j$

$c_0 = a_0 b_0$

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$\vdots$

SOUČIN polynomů f, g je polynom $fg = c_p x^p + c_{p-1} x^{p-1} + \dots + c_1 x + c_0$.

Tvrzení $f, g \in P[x]$, $\xi \in P$.

Pak $(f+g)(\xi) = f(\xi) + g(\xi)$

$(-f)(\xi) = -f(\xi)$

$(fg)(\xi) = f(\xi) \cdot g(\xi)$.

Důkaz DÚ.

Tvrzení $f, g, h \in P[x]$.

1) $f+g = g+f$
2) $f+(g+h) = (f+g)+h$
3) $f+0 = f$
4) $f+(-f) = 0$
5) $fg = gf$
6) $f\cdot(g\cdot h) = (f\cdot g)\cdot h$
7) $f \cdot 1 = f$
8) $f\cdot(g+h) = fg+fh$.

Důkaz 2) $\xi \in P$

$(f+(g+h))(\xi) = f(\xi) + (g+h)(\xi) =$

$= f(\xi) + g(\xi) + h(\xi)$

...

zbytek DÚ.

Tvrzení Součin nenulových polynomů f, g je nenulový polynom a platí

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g$$

$$\operatorname{lc}(fg) = \operatorname{lc} f \cdot \operatorname{lc} g.$$

Důkaz $f, g \in P[x]$ nenulové

$\operatorname{lc} f = a_n \neq 0$, $\operatorname{lc} g = b_m \neq 0$.

$\deg f = n$, $\deg g = m$.

pro $k > m+n$ je $c_k = 0$

To znamená, že $\deg fg \leq m+n$.

$c_{m+n} = a_n b_m \neq 0$.

$\Rightarrow \deg fg = m+n$

$f, g \in P[x]$

Říkáme, že polynom g DĚLÍ polynom f, když existuje polynom $h \in P[x]$ takový, že $f = g \cdot h$.

Zapisujeme $g \mid f$.

(g je DĚLITEL f, f je DĚLITELNÉ g).

Př. $\underset{g}{x}, \underset{f}{x^2}$ $\quad h = x$

$f = g \cdot h$

$f = x^2 - 1, \ g = x + 1, \ h = x - 1$

$f = g h$.

<u>Tvrzení</u> 1) $g \mid f$ a $f \mid h \Rightarrow g \mid h$

2) $h \mid f$ a $h \mid g \Rightarrow h \mid f \pm g$

3) $h \mid f \Rightarrow h \mid f \cdot g$.

<u>Důkaz</u> 1/ $\exists\, g_1 : f = g \cdot g_1$

$\exists\, f_1 : h = f \cdot f_1$ $\Rightarrow h = g \cdot \underbrace{g_1 f}$

✓

ostatní DÚ.

Polynom $f \in P[x]$ se nazývá NORMOVANÝ, jestliže $f \neq 0$ a $lc\, f = 1$.

$\frac{1}{lc f} f$ je normovaný polynom.

Tvrzení $f, g \in P[x]$ normované polynomy. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1) $f \mid g$ a $g \mid f$.

2) $f = g$.

Důkaz Předp. 1) Tedy $f \mid g$ a $g \mid f$.
$\Rightarrow \exists\, p, q \in P$ tak, že $f = gp$ a $g = f \cdot q$. Tedy $f = f \cdot q \cdot p \Rightarrow$

$1 = q \cdot p$. $\Rightarrow p, q$ jsou konstantní polynomy.

$1 = lc\, f = lc\, gp = \underbrace{lc\, g}_{=1} \cdot lc\, p = lc\, p = p$.

$f = gp = g \cdot 1 = g$. ✓

2) $\Rightarrow$ 1) zřejmé.

$f, g \in P[x]$. Potom $d \in P[x]$ se nazývá NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL polynomů f, g, jestliže platí

1) d je normovaný,
2) $d \mid f$ a $d \mid g$,
3) když $h \in P[x]$, $h \mid f$ a $h \mid g$, pak $h \mid d$.

$$d = D(f, g).$$

Tvrzení $f, g \in P[x]$. Pokud ~~existuje~~ jejich největší společný dělitel, pak je jediný.

Důkaz DÚ.

Polynomy f, g takové, že $D(f, g) = 1$ se nazývají NESOUDĚLNÉ.

Tvrzení $f, g \in P[x]$, $g \neq 0$.
Pak existují polynomy $q, r \in P[x]$
tak, že 1) $f = g \cdot q + r$
2) $r = 0$ nebo $\deg r < \deg g$.

Tvrzení $f \in P[x]$, $\xi \in P$.
Následující podmínky jsou ekvivalentní.
1) ξ je kořen f.
2) $(x-\xi) \mid f$.

Důkaz 1) ξ je kořen f, tedy $f(\xi) = 0$.

$f = (x-\xi)\cdot q + r$, kde $r = 0$ nebo $\deg r < \deg(x-\xi)$

$$0 = f(\xi) = \underbrace{(\xi-\xi)\cdot q(\xi)}_{=0} + r(\xi) \Rightarrow r = 0.$$

2) $(x-\xi) \mid f \Rightarrow \exists g: f = g(x-\xi)$

$$f(\xi) = g(\xi)\cdot(\xi-\xi) = 0 \checkmark$$

homepages.math.slu.cz/
ZdenekKocan/vyuka/2010-2011/